

2.4. 以代數方法求二次函數的極大值和極小值 (Find the Maximum and Minmum Values of Quadratic Functions by the algebraic method)

☆ “以代數方法求二次函數的極大值和極小值” 嘅技巧 (配方法) 比較困難, 所以先教一個比較簡單嘅方法:

- 二次函數嘅圖像個樣係 “一隻碗”, 因應開口嘅方向, 個圖像一係就有極大值、一係就有極小值 (唔會兩個都有)。而依個極值會發生喺對稱軸 $x = -b/2a$ 上。
- ◆ 因此要求到個極值, 我哋要將 $x = -b/2a$ 嘅值代入函數入面。

例子: 求二次函數 $f(x) = -x^2 + 6x - 7$ 的極大值。

答案:

考慮二次函數圖像 $y = -x^2 + 6x - 10$, 圖像的極大值發生於對稱軸上。

對稱軸為 $x = -b/2a$

$$x = -6/2(-1)$$

$$x = 3$$

當 $x = 3$ 時,

$$y = -(3)^2 + 6(3) - 10$$

$$y = -1$$

所以 $f(x)$ 的極大值 $= -1$ (極大值都可以係負嘅!)

2.4.1. 配方法 (Method of Completing the Square)

● 配方法用咗以下兩條恆等式:

◆ $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

◆ $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

- 留意右方的 x^2 前的數字 (即個 “係數”) 一定係 “1”。
- 左方括號中 x 後的符號數值就是把右方 x 項的數值 “除 2”。
- 唔理左方括號中嘅 a 係正定負都好, 右方最尾的數字一定係 “ $+a^2$ ”

● 而我哋用配方法做上面條例子嘅答案會好似下面咁:

$$f(x) = -x^2 + 6x - 10$$

$$= -(x^2 - 6x + 10)$$

$$= -[x^2 - 6x + (6/2)^2 - (6/2)^2 + 10]$$

$$= -[(x - 3)^2 - 9 + 10]$$

$$= -(x - 3)^2 - 2$$

因 $-(x - 3)^2$ 必定要少於或等於 0,

所以 $f(x)$ 的極大值 $= -2$

← 要抽 “-1” 出嚟, 令 x^2 前的數變成 1

← 加 “ $+a^2 - a^2$ ” 入條式度

← 利用恆等式將頭三項變成一個完全平方

← 拆走個方括號