

3.3. 理解對數的定義及其性質 (Understand the Definition and Properties of Logarithms)

3.3.1. 與對數有關的“聯想題”

- ◇ 一般同學都唔係好熟對數。我諗原因係好少用、好少見、好少考（我知有 D 學校嘅老師更對“對數”隻字不提）。
- ◇ 要明白同記得對數，我發覺最好係先明白以下嘅“聯想題”：
 - 首先要諗起： $10^0 = 1$ ， $10^1 = 10$ ， $10^2 = 100$ ， $10^3 = 1000$
 - 再用部計數機計： $\log 1$ ， $\log 10$ ， $\log 100$
 - 你估吓 $\log 1000$ 係等於幾多？
 - ◆ 估完之後用計數機自己睇答案……我希望你估得啱啦！

3.3.2. 對數的定義

$\log x$ 的定義

- ◇ 從上面嘅“聯想題”，我希望你會覺得 \log 同“10 嘅幾多次方”係有關嘅。
- 睇返“聯想題”：
 - $\log 100 = \log 10^2 = 2$ （留意 2 嘅位置）
 - $\log 1000 = \log 10^3 = 3$ （留意 3 嘅位置）
 - 咁如果 $x = 10^4$ ，咁 $\log x$ 咪等於 4！
- 由以上嘅講解，大家應可“推論”到對數函數（ $\log x$ ）嘅定義：
 - 如果 $x = 10^y$ ，咁 $\log x = y$
- 唔明唔係好緊要……最緊要記得用計數機計到 $\log 10 = 1$ ， $\log 100 = 2$ ， $\log 1000 = 3$ ……

$\log_a x$ 的定義

- 其實上面講嘅係一個簡化咗嘅對數。
 - “正統”嘅對數係有一個“底”嘅。
- 對數函數（ $\log_a x$ ）嘅定義：
 - 如果 $x = a^y$ ，咁 $\log_a x = y$ （a 就係個“底”）
- 例子： $2^3 = 8$ ，所以 $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$
- ◇ 當我哋有寫個“底”嘅時候，其實個“底”係 10。
 - 依個係一個“習慣”，可能係因為我哋用開“十進制”，所以唔寫就當係 10。

3.3.3. 對數的性質

- 先講底係 10 嘅“對數性質”（其實只係喺條式度我哋唔駛寫個“底”）

1. $\log 1 = 0$
2. $\log 10 = 1$
3. $\log (MN) = \log M + \log N$ ← 兩個數乘咗先 $\log =$ 分別 \log 咗後再加埋
4. $\log \frac{M}{N} = \log M - \log N$
5. $\log M^k = k \log M$

- 咁如果個底係 a ，“對數性質”就會變成以下咁：

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$
4. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
5. $\log_a M^k = k \log_a M$
6. $\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$

- 上面第 6 條係“對數轉底”嘅公式（即係將對數函數嘅底又一個值換成另一個值）。
 - ◆ 不過條式嘅確係幾難難記，而對大家嚟講，條式應用嘅意思又唔大（只少大家唔會明白轉底有咩用）。一向依條式都好少考。但如果大家有做考評局出嘅中學文憑數學樣本試卷，佢偏偏就喺卷一（LQ）第 17 條出咗考依條式嘅數。
 - ◆ 因此大家有心想做好乙部嘅題目，咁都係“記一記”條式吧！
 - ◆ 如果唔記得，我建議到時用計數機幫一幫你。
 - 相信一睇你會“估”到 $\log_3 3 = 1$ 、 $\log_3 9 = 2$
 - 咁到底點用 $\log_{10} 3$ 同 $\log_{10} 9$ 計返個 2 出嚟嘅？
 - 用一用計數機就知 $\log_{10} 9 / \log_{10} 3 = 2$
 - 所以 $\log_3 9 = \log_{10} 9 / \log_{10} 3$