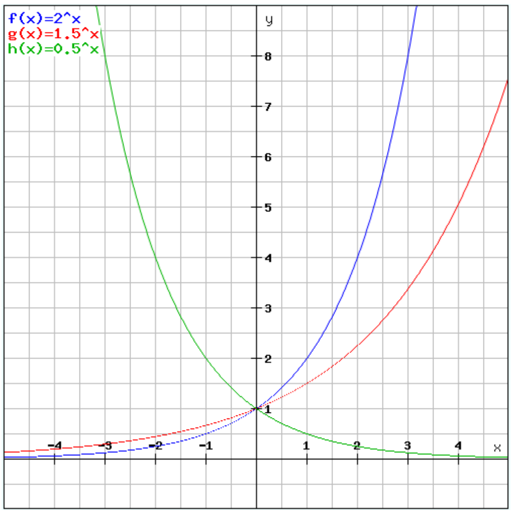
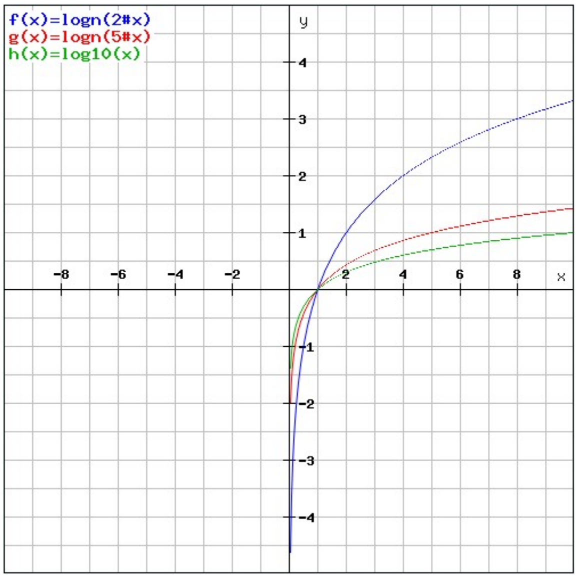
3.4. 理解指數函數與對數函數的性質及認識其圖像的特徵 (Understand the Properties of Exponential Functions and Logarithmic Functions and Recognise the Features of their Graph)

3.4.1. 指數函數的性質及圖像



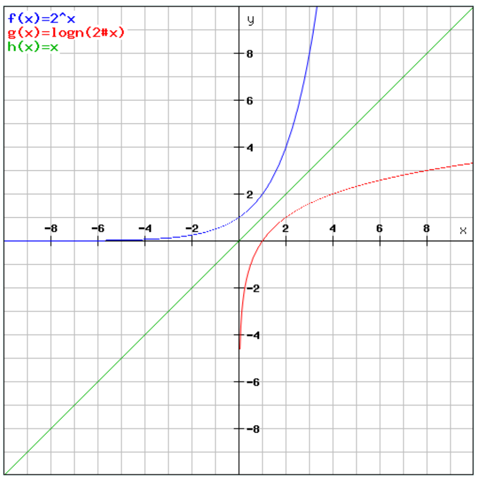
- 指數函數係 a^x
  - 當中 a 為實數；x 為變量（即變數）
  - 例子： 2^x
  - 定義域係 $-\infty < x < \infty$ （∞＝無限大）
    - 即“所有實數”
- 指數函數嘅圖像係 $y = a^x$
  - 右面圖中就有三個例子：
    - $y = (1/2)^x$；$y = (1.5)^x$； $y = 2^x$；
- 要明白同理解“指數函數嘅圖像”個樣其實唔太難，只要明白幾點就 ok：
  - 無論 a 等於咩都好，a^0 永遠等於 1（即 $a^0=1$）。
    - 所以當 x=0 時，$y = a^0 = 1$。即所有指數函數嘅圖像都會通過 (0, 1)依點。
  - 先假設 x 係正整數，咁 a^x 就等於“a 自己乘自己幾多次”（例如 $a^3 = a \times a \times a$）。
    - 當 $a > 1$ 嘅時候，a 自乘次數越多，個數就會越大。
      - 所以對 $y = (1.5)^x$ 同 $y = 2^x$ 兩幅圖嚟講，當 x 增加時，y 亦會增加。
    - 當 $0 < a < 1$ 嘅時候，a 自乘次數越多，個數就會越細。
      - 所以對 $y = (1/2)^x$ 幅圖嚟講，當 x 增加時，y 會減少。
        - 所以當 x 好大嘅時候，y 會好接近 0。
    - ✧ $a < 0$ 依種情況係唔會考嘅！
  - 當 x 係負數嘅時候，$y = a^{\text{負數值}} = \frac{1}{a^{\text{正數值}}}$。所以根據上面嗰點：
    - 當 $a > 1$ 嘅時候，負數值越負，$a^{\text{正數值}}$ 會越大，即 $\frac{1}{a^{\text{正數值}}}$ 會越接近 0。
    - 當 $0 < a < 1$ 嘅時候，負數值越負，$a^{\text{正數值}}$ 會越接近 0，即 $\frac{1}{a^{\text{正數值}}}$ 會好大。
  - 另外比較圖像 $y = (1.5)^x$ 同 $y = 2^x$，大家會發覺 $y = 2^x$ 嘅圖樣係升得快過 $y = (1.5)^x$ 嘅。
    - 依個其實好易理解。a^x 等於“a 自乘幾多次”，所以當 x 增加 1 嘅時候：
      - 對 $y = (1.5)^x$ 嚟講只係“乘多一個 1.5”
      - 但對 $y = (2)^x$ 嚟講就“乘多一個 2”。更係大得快 d 啦！

3. 4. 2. 對數函數的性質及圖像



- 對數函數係 $\log_a x$
  - 當中 a 為實數；x 為變量（即變數）
  - 例子： $\log_2 x$
  - 定義域係 $0 < x < \infty$ （∞＝無限大）
    - 即"所有正數"
- 對數函數嘅圖像係 $y = \log_a x$
  - 右面圖中就有三個例子：
    - $y = \log_2 x$ （藍色線）；
      $y = \log_5 x$ （紅色線）；
      $y = \log_{10} x$ （綠色線）
- 要明白同理解"對數函數嘅圖像"個樣其實唔太難，只要明白幾點就 ok：
  - 無論 a 等於咩都好，a^0 永遠等於 1（即 $a^0=1$）。
    - 所以當 x=1 時，$y = \log_a 1 = 0$。即所有對數函數嘅圖像都會通過 (1, 0)依點。
  - 因為 $\log_a a = 1$，而 $\log_a a^n = n (\log_a a) = n$。所以例如對 $y = \log_2 x$ 嚟講：
    - 當 x=2 時，$y = \log_2 2 = 1$； 當 x=4 時，$y = \log_2 4 =\log_2 2^2 = 2$
      當 x=8 時，$y = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$。
      所以 $y = \log_2 x$ 嘅圖會經過 (2, 1)、(4, 2)、(8,3)、(16,4)等點。
  - 而對 $y = \log_{10} x$ 嚟講：
    - $y = \log_{10} x$ 嘅圖會經過 (10, 1)、(100, 2)、(1000,3)、(10000,4)等點
    - 大家可以見到 $y = \log_2 x$ 嘅圖樣係升得快過 $y = \log_{10} x$ 嘅
  - 用計數機計"一個負數嘅 log"係會"maths error"嘅！
    - 咁係因為 $\log_a x$ 嘅定義域係 $0 < x < \infty$
    - 所以對數函數嘅曲線係唔會喺 y-軸左邊嘅

3. 4. 3. 指數函數的圖像及對數函數的圖像對稱於 y=x



- 喺右邊有三個圖像：
  - $y = x$ （綠色線）
  - $y = 2^x$ （藍色線）
  - $y = \log_2 x$ （紅色線）
- 依個就係喺"課程指引"入面所講嘅"$y=a^x$ 與 $y = \log_a x$ 對稱於 $y = x$"
  - 即係好似當條綠色線係塊鏡咁將幅圖反射。

✧ 大家唔明就算。因為當中嘅解釋係比較深，而且我覺得依點喺長題目度出嘅機會唔大。