# 9.4. 從表列、符號和圖像的角度理解函數 f(x) 的變換（Understand the Transformation of the Function f(x) from Tabular, Symbolic and Graphical Perspectives）

- “函數的變換”其實係對一個函數 f(x)進行一 D 數學上嘅“改動”而得出一個新函數。
  - 至於新函數同舊函數嘅關係，我哋通常會基於新、舊函數嘅圖像嚟作比較。
  - 喺依課入面，我哋都用嘅函數 f(x) 都會係“$x^2 - x - 6$”

## 9.4.1. 把圖像 y=f(x) 作上下移動（Translating the Graph Upwards/Downwards）

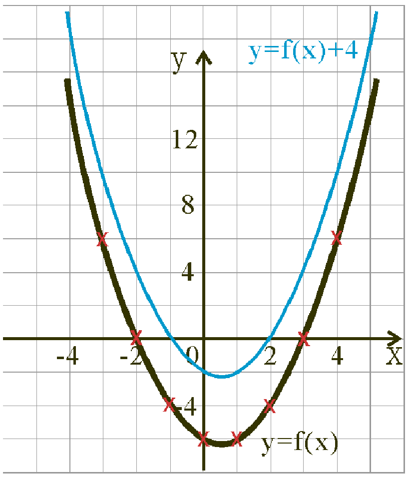
- 仲記唔記得我哋點用表列（即用下面個表）嚟幫我哋畫 $y = x^2 - x - 6$ 嘅圖像？

| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 6 | 0 | -4 | -6 | -6 | -4 | 0 | 6 |

- 如果我哋要將個圖像向上移四格，好明顯我哋要睇將每一個 y 值都“加 4”。
  - 如果用表列嚟表示，我哋就會有下面嗰表：

| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 6 | 0 | -4 | -6 | -6 | -4 | 0 | 6 |
| f(x)+4 | 10 | 4 | 0 | -2 | -2 | 0 | 4 | 10 |

  - 而新、舊嘅圖像就會好似下面幅圖咁：

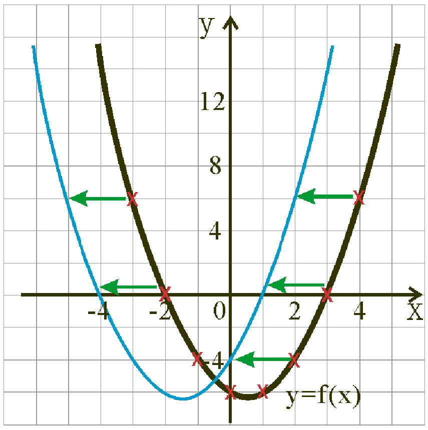



  - 用符號嚟表達嘅話，個新函數就係 f(x) + 4。

✧ 總結：
  - 如果將圖像 y = f(x) 上移 k 格，咁新函數圖像嘅符號式係 y = f(x) + k。
  - 如果將圖像 y = f(x) 下移 k 格，咁新函數圖像嘅符號式係 y = f(x) – k。

### 9.4.2. 把圖像 y=f(x) 作左右移動（Translating the Graph to the Left/Right）

- 如果我哋要將個圖像向左移兩格，好明顯新、舊嘅函數圖像如好似下面幅圖咁：




- 睇返舊函數嘅表列：

| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 6 | 0 | -4 | -6 | -6 | -4 | 0 | 6 |

而根據個新函數嘅圖像，我哋可以見到新函數嘅表列係（我哋暫叫個新函數做 g(x)）：

| x | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| g(x) | 6 | 0 | -4 | -6 | -6 | -4 | 0 | 6 |

- 假如我哋將新、舊函數嘅 y 值一欄一欄咁對齊（留意上面嘅表列嘅紅色的欄位），我哋會發現相應嘅 x-值都係相差 2。即：

  $g(0) = f(2)$；

  $g(1) = f(3)$；

  $g(2) = f(4)$；

- 由此我哋可以推論出： $g(x) = f(x + 2)$

✧ 總結：

■ 如果將圖像 $y = f(x)$ 左移 k 格，咁新函數圖像嘅符號式係 $y = f(x + k)$。

■ 如果將圖像 $y = f(x)$ 右移 k 格，咁新函數圖像嘅符號式係 $y = f(x − k)$。

✧ 唔似得將圖像作上下移動，好多同學都會將 f(x + k)同 f(x – k)撈亂。我建議大家要練習吓用以下嘅想法去作出判斷：

■ 想像舊嘅圖像經過一點(5, 8)。咁即係當 x=5 時，$y = f(5) = 8$。

■ 如果新函數 g(x)嘅圖像要向左移 2 格，咁即係話當 x = 3 時，$y = g(3) = f(5) = 8$。

◆ 咁即係話 $g(3) = f(3 + 2)$，所以 $g(x) = f(x + 2)$

■ 如果新函數 h(x)嘅圖像要向右移 3 格，咁即係話當 x = 8 時，$y = h(8) = f(5) = 8$。

◆ 咁即係話 $h(8) = f(8 – 3)$，所以 $h(x) = f(x – 3)$

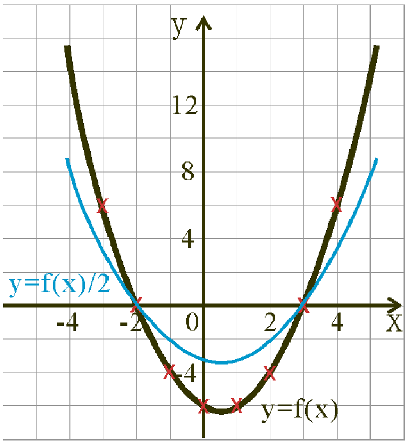
✧ 當然，如果你話“我唔會記錯嘅！”，咁你的確只要記住上面個總結就冇問題。

## 9.4.3. 把圖像 y=f(x) 沿 y-軸作伸展或縮少 （Stretching/Compressing the Graph across y-axis）

- "沿 y-軸作縮少" （例如縮少一半）其實就好似我哋用哈哈鏡將幅圖上下壓扁。
  - 如果用表列嚟表示，我哋就會有下面嗰表：

| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 6 | 0 | -4 | -6 | -6 | -4 | 0 | 6 |
| f(x)/2 | 3 | 0 | -2 | -3 | -3 | -2 | 0 | 3 |

  - 而新、舊嘅圖像就會好似下面幅圖咁：




  - 用符號嚟表達嘅話，個新函數就係 f(x)/2 （亦可以話係 (1/2)f(x)）。
- 唔難想像如果我哋將幅圖 "沿 y-軸作伸展一倍" ，個新函數會係 2f(x)。

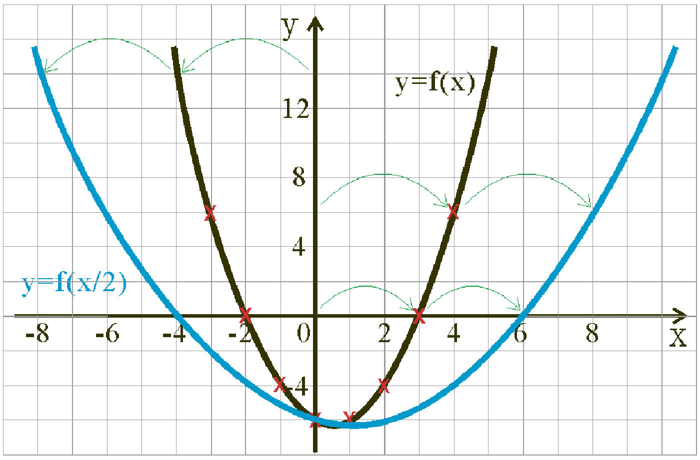
✧ 總結：
  - 如果將圖像 y = f(x) 沿 y-軸作伸展或縮少，咁新函數圖像嘅符號式係 y = kf(x)。
    - 當 0 < k < 1 時，圖像就會作縮少。
    - 當 k > 1 時，圖像就會作伸展。

## 9.4.4. 把圖像 y=f(x) 沿 x-軸作伸展或縮少 （Stretching/Compressing the Graph across x-axis）

- 同“沿 y-軸作伸展”相似，“沿 x-軸作伸展”（例如伸展一半）就係將幅圖左右咁壓扁。
  - 首先我哋睇吓下面嗰表（記住 $f(x) = x^2 - x - 6$）：

| X | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 14 | 6 | 0 | -4 | -6 | -6 | -4 | 0 | 6 |
| f(x/2) | 0 | | -4 | | -6 | | -6 | | -4 |

  - 而新、舊嘅圖像就會好似下面幅圖咁：




留意舊圖嘅每一點同 x-軸嘅距離就好似放大咗一倍咁（如圖中綠色箭咀所示）。

  - 用符號嚟表達嘅話，個新函數就係 f(x/2)。
- 唔難想像如果我哋將幅圖“沿 x 軸作縮少一倍”，個新函數會係 f(2x)。

✧ 總結：

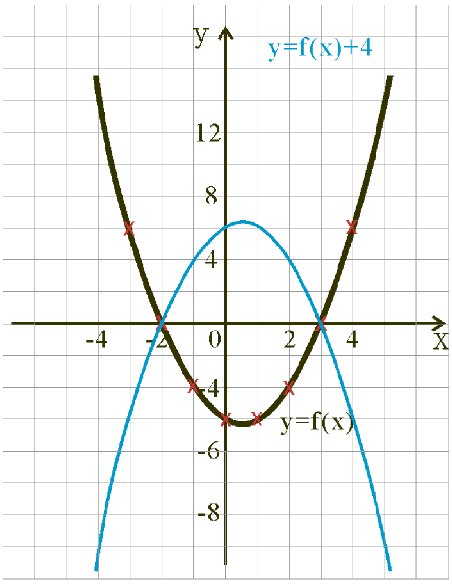
- 如果將圖像 y = f(x) 沿 x-軸作伸展或縮少，咁新函數圖像嘅符號式係 y = f(kx)。
  - 當 $0 < k < 1$ 時，圖像就會於水平方向作放大。
  - 當 $k > 1$ 時，圖像就會於水平方向作縮少。

## 9.4.5. 把圖像 y=f(x) 沿 x-軸或 y-軸作反射 （Reflecting the Graph in x-axis/y-axis）

- “反射”亦可以被形容為“沿住 x-軸上下倒轉”或“沿住 x-軸左右反轉”。
  - 我哋先考慮以下嘅表：

| X | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 6 | 0 | -4 | -6 | -6 | -4 | 0 | 6 |
| -f(x) | -6 | 0 | 4 | 6 | 6 | 4 | 0 | -6 |

  - 新、舊嘅圖像就會好似下面幅圖咁：




    - 由此可見“沿 x-軸作反射”後嘅新函數圖像係 $y = -f(x)$。
- 唔難想像如果我哋將幅圖“沿 y-軸作反射”，個新函數會係 $f(-x)$。

✧ 總結：
  - 如果將圖像 $y = f(x)$ 沿 x-軸作反射，咁新函數圖像嘅符號式係 $y = -f(x)$。
  - 如果將圖像 $y = f(x)$ 沿 y-軸作反射，咁新函數圖像嘅符號式係 $y = f(-x)$。

✧ 其實反射可以話係以前學過咗“把圖像 y=f(x) 沿 x-軸或 y-軸作伸展或縮少”嘅一個特別情形。
  - 當中 $y = k\,f(x)$及 $y = f(kx)$ 嘅 k 值係 “$-1$”。
  - 再推論落去，我哋會發現如果 k 值係“$-2$”，咁 $y = -2\,f(x)$ 其實係會有一個“沿 x-軸作反射後再沿 y-軸伸展一倍”嘅效果。
    - 這亦可以睇成係因為“$-2 = (-1) \times 2$”。