

11.3. 以代數方程描述點的軌跡 (Describe the Locus of Points with Algebraic Equations)

- ☆ 前面學嘅都只係一 D 概念。當中並冇涉及到用“數學符號”嚟代表個軌跡。
 - 而依一課學嘅就係要學依樣嘢
- 喺數學上，一個軌跡其實通常係一條代數方程。
- 而求依條方程嘅方法多數係：
 - 想像喺軌跡上面有一點(x,y) (依點就係我哋之前提到喺軌跡上隨意走動嘅點)。
 - 然後將軌跡要合乎嘅“條件”用數學嘅方法表達出嚟 (即係列條數式出嚟)。
 - 最後將列出嚟嘅數式化簡。
- ☆ 軌跡嘅問題可以話千變萬化。不過幸好依個課題只係必修部份、仲要喺基礎課題。所以應該唔會考得太深同變得太離譜。
 - 根據課程，大家要識嘅係“求簡單軌跡的方程”，包括：
 - ◆ 直線
 - ◆ 圓
 - ◆ 形式如 $y = ax^2 + bx + c$ 的拋物線

11.3.1. 求直線軌跡的方程

- 直線離有以下三種：
 - 水平線
 - ◆ 方程個樣係 $y = k$ (k 為常數)。例子： $y = 3$ 。
 - 鉛垂線
 - ◆ 方程個樣係 $x = k$ (k 為常數)。例子： $x = 5$ 。
 - 斜線。
 - ◆ 方程個樣係 $ax + by + c = 0$ (a, b, c 為常數)。例子： $2x + y + 3 = 0$ 。
- 如果要求嘅軌跡係一條水平線或鉛垂線，其實只要理解題目，咁就條數係唔多駛計嘅。
 - 例子：P 點與水平線 $y = 3$ 及 $y = 7$ 是等距的。求 P 點的軌跡。
 - ◆ 解說：先想一想個軌跡會係咩樣。
 - 照計大家應該可以諗到答案會係一條喺 $y = 3$ 同 $y = 7$ 日間嘅水平線。(睇唔到就畫 $y = 3$ 同 $y = 7$ 出嚟)
 - 所以 P 點的軌跡是 $y = 5$ 。
 - 例子：Q 點與點 (4, 5) 及 (8, 5) 的距離相等。求 Q 點的軌跡。
 - ◆ 解說：先想一想個軌跡會係咩樣。
 - 照計大家應該可以諗到答案會係一條兩點之間嘅鉛垂線。
 - 所以 Q 點的軌跡是 $x = 6$ 。

- 如果要求嘅軌跡係一條斜線，咁就多數要“計一計”。
 - 例子：點 R 與線 $3x + y + 3 = 0$ 及 $3x + y + 9 = 0$ 的距離相等。求 R 點的軌跡。
 - 解說：先想一想個軌跡會係咩樣。
 - ◆ 留意兩條線嘅方程只係最後嘅數字唔同。咁係代表兩條線係平行線。
 - ◆ 照計大家應該諗到個答案會係喺佢哋中間嘅平行線。而條線嘅方程同佢哋都係差唔多，只係最後嘅數字會等於“3 同 9”嘅平均數。
 - ◆ 所以 R 點的軌跡是 $3x + y + 6 = 0$ 。
 - 例子：S 點與點 A(4, 5) 及 B(8,1) 的距離相等。求 S 點的軌跡。
 - 解說：先想一想個軌跡會係咩樣。
 - ◆ 如果你以為答案係一條水平或鉛垂線，就唔該畫一畫兩點同個“你想到嘅答案”出嚟。（留意今次嘅題目入面嗰兩點嘅 x、y-坐標都係唔同嘅。）
 - ◆ 要搵個答案，我哋要用最初有提咗嘅“將軌跡要合乎條件用數學嘅方法表達出嚟”嘅方法：
 - 設 S 點為 (x, y) 。
 - SA 長度 = SB 長度

$$(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = (x - 8)^2 + (y - 1)^2$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 = x^2 - 16x + 64 + y^2 - 2y + 1$$

$$- 8x + 16 - 10y + 25 = - 16x + 64 - 2y + 1$$

$$8x - 8y - 24 = 0$$

$$x - y - 3 = 0$$
- ☆ 以上我哋用咗初中坐標幾何入面學過嘅兩點距離公式。唔記得嘅可以睇睇“唔好以為唔駛考課題”入面嘅教程。
- ☆ 至於角平分線嘅軌跡（即 11.2.6 入面話嘅軌跡）我就覺得應該唔會出。咁係因為好似課程入面有提到要大家識得計“一點與一條直線嘅距離”（喺會考入面依個係附加數嘅課題）。

11.3.2. 求圓軌跡的方程

- 如果題目要求軌跡係“有一點同另一固定點保持固定距離”嘅話，咁個軌跡就係一個圓形。依個時候我哋又係要用“將軌跡要合乎嘅條件用數學嘅方法表達出嚟”嘅方法。

- 例子：S 點與點 A(4, 5) 的距離為 3。求 S 點的軌跡。

- 解說：個軌跡好明顯係一個圓。

- 設 S 點為 (x, y) 。

- SA 長度 = 3

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2} = 3$$

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 = 9$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 10y + 32 = 0$$

- ◇ 到底點解上面嘅方程係一個圓形大家可能唔明。

- 先接受吧！我哋會喺“第 12 課 – 直線與圓的方程”度學圓嘅方程。

11.3.3. 求拋物線軌跡的方程

- ◇ 正如個名所講，“拋物線軌跡”喺當我哋拋一個物體出去之後，佢所走嘅路線嘅樣。

- 數學上佢其實就係我哋學過嘅一元二之方程圖像（即 $y = ax^2 + bx + c$ ）。

- ◆ 現實生活中嘅拋物線當然要係“個圖像嘅開口向下”。

- 而“拋物線軌跡”所合乎嘅條件是“有一點與一固定點及直線的距離係相等的”。

- 例子：P 點與點 A(2,3)及直線 $y=1$ 的距離相等。求 P 點的軌跡。

- 其實當大家睇唔到個軌跡係咩而用“軌跡要合乎嘅條件用數學嘅方法表達出嚟”嘅時候，我哋可以唔駛理個軌跡係咩。只要跟住個方法照做：

- 設 P 點為 (x, y) 。

- P 點與點 A(2,1)的距離 = P 點與直線 $y=1$ 的距離

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = y - 1$$

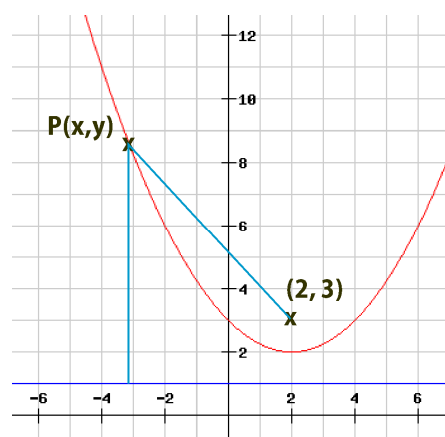
$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = (y-1)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = y^2 - 2y + 1$$

$$x^2 - 4x + 13 = 4y + 1$$

$$x^2 - 4x + 12 = 4y$$

$$y = (1/4)x^2 - x + 3$$



- ◇ 留意 P 點與直線 $y=1$ 的距離係條鉛垂線，長度 = $y - 1$ 。