

12.4. 求直線與圓交點的坐標及理解直線與圓相交的各種可能情況 (Find the Coordinates of the Intersections of a Straight Line and a Circle and Understand the Possible Intersection of a straight Line and a Circle)

◇ 我諗唔難想像一條直線同一個圓相交嘅情況有以下三種：

- 直線穿過圓形，因此佢哋有兩個相交點。
- 直線只係掂住個圓形（即直線係圓嘅切線），因此佢哋只有一個相交點。
- 直線喺圓嘅外面“經過”，因此佢哋冇相交點。

12.4.1. 求直線與圓交點的坐標

◇ 喺未講點判斷以上邊種情況會發生之前，我哋先要學點用直線同圓嘅方程嚟求個相交點。

- 其實同求相條直線嘅相交點嘅概念同方法一樣。
- 我哋要做嘅係解咗直線同圓兩條方程嘅“二元一次聯立方程”。
 - ◆ 而當中我哋要用到代入消元法（加減消元法喺依種情形下唔 work）。

● 例子：求直線 $2x - y + 1 = 0$ 與圓 $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 8 = 0$ 的交點。

● 解說：

- 我哋先將直線嘅方程變成“x 等於幾多 y”或者“y 等於幾多 x”（邊個方便就變邊個）。
由 $2x - y + 1 = 0$ ，可知 $y = 2x + 1$
- 之後將佢代入圓方程度、再展開、化簡、再解條一元二次方程。

$$x^2 + (2x+1)^2 - 2x - 6(2x+1) - 8 = 0$$

$$x^2 + (4x^2 + 4x + 1) - 2x - 12x - 6 - 8 = 0$$

$$5x^2 - 10x - 13 = 0$$

$$x = 2.90 \text{ 或 } x = -0.90$$
- 上面嘅答案就係直線同圓嘅交點嘅 x-坐標。
- 要計埋個 y-坐標，我哋只要將佢代入“y 等於幾多 x”條式度。
 - ◆ 當 $x=2.90$ 時， $y = 2(2.90)+1 = 6.80$ 。
 - ◆ 當 $x=-0.90$ 時， $y = 2(-0.90)+1 = -0.80$ 。
- 因此，直線同圓嘅交點係 $(2.90, 6.80)$ 及 $(-0.90, -0.80)$ 。

12.4.2. 判斷直線與圓相交的情況

- 由計相交點嘅方法度，我哋係要解一條一元二次方程。
 - 而根嘅數目就正正係相交點嘅數目。
 - 而一條一元二方程嘅根嘅數目又有可能係“2, 1 或者 0”。
 - ◆ 咁大家又記唔記得點判斷一條一元二次方程有幾個根呢？
 - 冇錯！就係睇條一元二次方程嘅判別式 $b^2 - 4ac$ 。

12.4.3. 求圓的切線方程

- ✧ 求圓的切線嘅題目基本上可以分為兩類。
 - 求通過圓上一點的切線。
 - ◆ 喺依個情形之下我哋會求到一條切線。(唔信可以試吓自己畫唔畫到兩條切線係通過圓上嘅某一點。)
 - 求通過圓外面某一點嘅切線。
 - ◆ 喺依個情形之下我哋會求到兩條切線。(還記得圓形幾何入面嘅切線性質嗎?)

- 其實無論喺邊一種情形，我哋求切線方程嘅方法都係一樣：
 - 先設切線為 $y = mx + c$ 。
 - 因為切線通過某一點(不論係圖上面或者圓外面)嘅，所以我哋可以代依點嘅坐標入直線方程度。為方便講解，當切線通過(1,2)依點。因此：

$$2 = m + c$$
 即
$$c = 2 - m$$
 - 所以直線嘅方程會變成 $y = mx + (2-m)$
 - 當我哋要求直線同圓嘅交點，所以要代“ $y = mx + (2-m)$ ”入圓方程度。
 - ◆ 咁就可以得到一條一元二次方程。
 - ◆ 而最後因為條直線係切線嚟嘅，所以依條方程嘅判別式會等於 0。
 - ◆ 我哋只要根據一元二次方程中嘅“a、b、c 位”代入公式 $b^2 - 4ac = 0$ ，然後解咗佢就會計到個 m。當中要留意嘅係：
 - 過程中嘅數式會幾長
 - 根據題目嘅情況，我哋可能會計到一個或者兩個 m。

- ✧ 如果大家有學中學文憑數學嘅延伸課程，其實我哋仲有其他方法嚟求圓嘅切線。不過喺依度就唔講喇。