# 14.3. 解不同物件的無重排列應用題（Solving Problems on the Permutation of Distinct Objects without Repetition）

✧ 喺前面我哋已經講解過排列嘅概念同記法，喺依課我哋就學點計同排列有關嘅數。
- ■ 留意標題入面有提到“不同物件”同“無重”兩個字眼。
  - ◆ “不同物件”就係指要排列嘅物件每件都唔同。而喺前面我哋都見過如果物件當中有相同嘅話，排列嘅方法會少好多。
  - ◆ “無重”就係指我哋唔可以“重複”咁將同一件物件排喺兩個位置度。
    - ➢ 例如題目要求我哋由 “1、2、3” 入面抽出兩個數字嚟排列，咁“11、22、33”係唔係一個可能嘅排法。
  - ◆ 考評局咁 set 個課題都只係想簡化同限制題目嘅難度同變化。
    - ➢ 不過話雖如此，大家都係要留意題目嘅內容。

✧ 喺未講點做應用題前我哋先要學點計以下兩樣嘢：
- ■ 將 n 件不同物件排列嘅方法數目。
- ■ 從 n 件不同物件中抽出 r 件物件嚟排列嘅方法數目。

● 我哋先講“將 n 件不同物件排列嘅方法數目”。
- ■ 首先，我哋可以將“把 n 件不同物件排列”嘅動作睇成為“先放一件物作喺第一個位，然後再放另一件物件喺第二個位，然後...... 最後放一件物件喺第 n 個位”。
- ■ 而根據前面教過嘅“計數原理的乘法法則”，
  將 n 件不同物件排列嘅方法數目
  = 將一件物件放喺第一個位嘅方法數目 x 將一件物件放喺第二個位嘅方法數目 x 將一件物件放喺第三個位嘅方法數目 x .... x 最後放一件物件喺第 n 個位嘅方法數目
  - ◆ 而因為最初我哋有 n 件物件，所以有 n 個方法放一件物件喺第一個位度。
  - ◆ 而因為“唔會重複”放物件，所以到要放物件喺第二個位嘅時候我哋只有(n – 1)件物件。咁即係有(n – 1)個方法。
  - ◆ 如此類推，我哋就可以計到，
    將 n 件不同物件排列嘅方法數目 $= n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$
- ■ 數學家為咗偷懶唔想成日寫“$n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$”，佢哋就定義咗“階乘（factorial）”嘅概念同符號。
  $$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$
  - ◆ 例如： $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
    - ➢ 大家嘅計數機都應該喺有“x!”依個功能鍵嘅！請試吓用。
  - ◆ 如果你覺得“階乘”個名好難記，可以當佢喺“階梯嘅乘數”，由高至 1 咁乘。
- ■ 總結，
  將 n 件不同物件排列嘅方法數目 $= n!$

- 第二樣我哋先要學點計嘅係“從 n 件不同物件中抽出 r 件物件嚟排列嘅方法數目”。
  - 用返上面嘅諗想，
    從 n 件不同物件中抽出 r 個物件嚟排列嘅方法數目
    = 將一件物件放喺第一個位嘅方法數目 x 將一件物件放喺第二個位嘅方法數目 x 將一件物件放喺第三個位嘅方法數目 x .... x 最後放一件物件喺第 r 個位嘅方法數目
    $= n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times (n-r+1)$
    - 喺度教一教大家點睇最尾嗰個數係$(n-r+1)$。
      - 其實大家只係留意 “第二個數係將 n 減 1”、“第三個數係將 n 減 2” 入面嘅變化，咁就應該可以估到到第 r 個數嘅時候係“第 r 個數係將 n 減 r – 1”
      - 但留意到我哋寫出嚟嘅時候要有括號！
        所以 第 r 個數係 $n-(r-1)$，即係 $n-r+1$。
  - 而為咗偷懶，數學家又結果化簡成，
    從 n 件不同物件中抽出 r 個物件嚟排列嘅方法數目
    $$= n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times (n-r+1)$$
    $$= \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times (n-r+1) \times (n-r) \times (n-r-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1}{(n-r) \times (n-r-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1}$$
    $$= \frac{n!}{(n-r)!}$$
  - 咁仲未夠懶，數學家仲用埋最前我哋講過嘅“nPr”符號。
    - 因為 nPr = 從 n 件不同物件中抽出 r 件物件嚟排列嘅方法數目，所以
      從 n 件不同物件中抽出 r 件物件嚟排列嘅方法數目 $= nPr = \dfrac{n!}{(n-r)!}$
    - 例如：從 4 件不同物件中抽出 2 個物件嚟排列嘅方法數目
      $= {}_4P_2 = 4! / (4-2)! = 24 / 2 = 12$
      - 你部計數機都應該有“nPr”依個功能。如果你係用 casio fx-3650P，咁你就可以按“4 SHIFT x 2 EXE”嚟計 ${}_4P_2$。

✧ 咩係“0!”？
- 根據前面所講： 將 n 件不同物件排列嘅方法數目 = n !
- 但如果我哋將“將 n 件不同物件排列”睇成為“從 n 件不同物件中抽出 n 件物件嚟排列”，咁就計到： 將 n 件不同物件排列嘅方法數目 = nPn
- 而根據 nPr 嘅定義，只要代 r=n，我哋計到： $nPn = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{(0)!}$
- 因此我哋就會得到 0! = 1
  - ✧ 唔好問到底“0!”係代表咩！依個只係一個數學上嘅推論結果/定義。
  - ✧ 如果你用計數機計 0!，你都會得到 1 依個答案。
- 課程冇特別要求我哋識依樣嘢。只不過如果你知道咗，咁其實你以後只要記：
  從 n 件不同物件中抽出 r 件物件嚟排列嘅方法數目 = nPr

- ✧ 講到依度，我哋可以開始睇 D 應用題（即係文字題）。

- ✧ 先睇第一個例子：小明打算與三位朋友排成一線地影合照。每一種不同排列的方法他們都會影兩張相。求最終他們拍得的照片數目。
  - ■ 理解題目後，其實題目所講嘅情形就係“將 4 件不同物件排列”。
    - ◆ 排列的方法數目 $= {}_4P_4 = 24$
  - ■ 因此，他們拍得的照片數目 $= 2 \times$ 排列的方法數目 $= 48$

- ✧ 再睇另一個例子：導演正打算從 5 個男演員中選出 3 個男演員擔當電影內三個不同的角色。求角色安排的方法數目。
  - ■ 理解題目後，其實題目所講嘅情形就係“從 5 件不同物件中抽出 3 件物件嚟排列”。
  - ■ 因此，角色安排的方法數目 $= {}_5P_3 = 60$

- ✧ 再睇另一個例子：5 個人諗住以“前 2 後 3”排成兩行嚟影相。求他們排列的方法數目。
  - ■ 依條題目較“正路”嘅諗法係：
    - ◆ 先從 5 人中抽出 2 個排前面、**之後**剩低嗰 3 個就排後面。
    - ◆ 5 人中抽出 2 個排前面嘅排列方法數目 $= {}_5P_2 = 20$
    - ◆ 剩低嗰 3 個就排後面嘅排列方法數目 $= {}_3P_3 = 3! = 6$
    - ◆ 而因為整個排列嘅過程分成兩個步驟（即前面嘅“之後”）。因此，
      他們排列的方法數目 $= 20 \times 6 = 120$
    - ✧ 你亦可以用“先從 5 人中抽出 3 個排後面、**之後**剩低嗰 2 個就排前面”嚟計。
  - ■ 喺度教大家另一種諗法（因為依種諗法有時會將個情形簡化咗）。
    - ◆ 我哋先將 5 人排成一線、**之後**叫最左嗰兩個人行去前面嗰排。
    - ◆ 將 5 人排成一線嘅排列方法數目 $= {}_5P_5 = 5! = 120$
    - ◆ “叫最左嗰兩個人行去前面嗰排”嘅方法數目 $= 1$
      - ➢ 點解係 1？咁係因為 D 人已經排定，所以依個步驟當中唔會再有變化。
      - ➢ 你可以同“剩低嗰 3 個就排後面”比較。因為“剩低嗰 3 個”都未排好，所以當中有“排列數目”出現。
  - ✧ 喺度再講吓同學通常會錯嘅計法：
    - ■ 有人會諗“前面 2 個、後面 3 個”，所以 排列方法數目 $= 2! \times 3!$
      - ➢ 佢諗錯咗！以為“2 個人排前面”已經指定咗邊兩個人。但實際係可以由 5 個人中選兩個人出嚟排。
    - ■ 有人會諗“前面抽 2 個排、後面抽 3 個排”，所以 排列方法數目 $= {}_5P_2 \times {}_5P_3$
      - ➢ 佢又諗錯咗！第一個的確係“${}_5P_2$”。但當 2 個人已經排咗前面之後，我哋可以選嘅人只有 3 個。所以第二個數應該係 ${}_3P_3$。

- ✧ 最後我哋要睇嘅例子就係屬於課程講明要識嘅“其中三個指定物件必須相鄰”。
  - ■ 6 個朋友打算排成一線咁影相。但他們當中，小明、小強、小李三人堅持一定要企埋一齊嚟影。求他們 3 人影相時企埋一齊嘅排列方法數目。
    - ◆ 其實只要我哋將依種“其中三個指定物件必須相鄰”嘅題目用“分步驟”嘅方法嚟計就會好易。
    - ◆ 整個排列過程可以睇成：
      - ➢ 先將小明、小強、小李三個排好。當中嘅排列方法數目 = 3! = 6。
      - ➢ 緊住要做嘅就係將其他 3 個人同“依個 3 人組合”，一共 4 件物件排好。而 6 件物件排列嘅方法數目 = 4! = 24
      - ➢ 所以 5 人影目嘅排列方法 = 6 x 24 = 144
  - ■ 你可能會問，咁點解喺前面 5 個人排成“前 2 後 3”兩行嗰條題目度我哋計咗前排（$_5P_2$）嘅排列方法後就用“排剩低嗰 3 個人”（$_3P_3$）。而唔係用“剩低 3 人同前面個 2 人組合，一共 4 件物件嚟排” 。
    - ◆ 咁係因為前面個 2 人組合嘅排列位置已經定死咗喺前排。
    - ◆ 但“小明、小強、小李”依個組合就冇指明位置，所以我哋要當依個組合喺一件物件，加入埋之後嘅排列方法度。

- ✧ 前面都係咗幾多篇幅嚟講解唔同嘅例子。
  - ✧ 咁係因為排列嘅題目可以係“千變萬化”。
  - ✧ 但只要大家明白上面嘅例子，再試吓用細數量嘅物件嚟試吓唔同嘅排列方法，咁題目嘅答案都會係“萬變不離其中”。