

4.2.5. 推導 $pV=Nmc^2/3$ (Deriving $pV=Nmc^2/3$)

2 喺未開始推導 “ $pV=Nmc^2/3$ ” 之前，我哋先學一 D 喺推導入面會用到嘅知識。

n 假設一粒氣體分子嘅速度係 c 。

(通常公式入面嘅 c 係指光速，不過喺度佢只係分子嘅速度。)

u 如果我哋將佢嘅速度根據三維坐標分成三個部份(即右圖中嘅 v_x 、 v_y 、 v_z)，利用畢氏定理兩次，

$$c^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

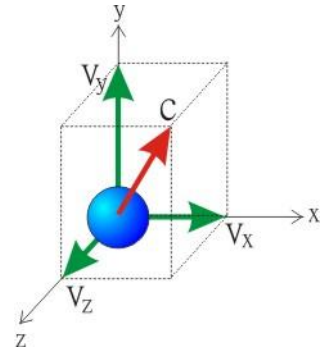
u 對於 N 粒氣體分子嚟講， v_x^2 嘅平均值係

$$\overline{v_x^2} = \frac{v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + v_{3x}^2 + \dots + v_{nx}^2}{N}$$

u 因為氣體分子喺無規則咁運動，所以 $\overline{v_x^2}$ 、 $\overline{v_y^2}$ 同 $\overline{v_z^2}$ 會相等。

u 因此對於 N 粒氣體分子嚟講， c^2 嘅平均值係

$$\overline{c^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3\overline{v_x^2}$$



l 假設氣體分子質量為 m ，而佢又喺一個邊長為 l 嘅正立方體容器入面走動。

l 考慮依粒分子喺 x 方向嘅運動，根據喺前面 4.2.2 所講嘅嘢：

n 分子碰撞灰色牆時嘅動量改變 = $m v_x - m(-v_x) = 2m v_x$

n 因為分子要走 $2l$ 咁遠先會再次碰撞灰色牆，所以

$$\text{碰撞與碰撞之間嘅時間} = 2l / v_x$$

n 另外 “作用喺灰色牆嘅力 = 動量改變嘅率 ”，所以

$$\text{作用喺灰色牆嘅力} = \frac{2mv_x}{2l/v_x} = \frac{mv_x^2}{l}$$

l 考慮容器入面嘅氣體一共有 N 粒分子。根據氣體壓強嘅定義：

$$\text{氣體壓強} = \frac{N \text{ 粒分子作用喺灰色牆嘅力}}{\text{灰色牆嘅面積}}$$

$$p = \frac{\frac{m}{l}(v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + \dots + v_{nx}^2)}{l^2}$$

$$p = \frac{m(N\overline{v_x^2})}{l^3}$$

$$p = \frac{m\left(N\frac{\overline{c^2}}{3}\right)}{V} \quad (\text{因為 容器體積 } V = l^3)$$

$$pV = \frac{Nmc^2}{3}$$

