

6.2. 推導向心加速度 $a = v^2/r$ (Deriving Centripetal Acceleration $a = v^2/r$)

- 2 一個進行緊勻速圓周運動嘅物體嘅速率 (Speed) 係不變嘅 (因為速率係標量, 冇方向性)
- 2 但物體係咁不停兜圈, 即係佢嘅運動方向不停咁變緊, 所以佢嘅速度都係不停咁變緊。
- n 而既然物體嘅速度有變, 就係物體有一個加速度。

I 要推導出物體嘅加速度, 我哋先考慮物體喺兩個唔同時間嘅情況:

n 物體喺 A 點同 B 點嘅位置上嘅速度分別係 v_A 同 v_B 。

u 根據勻速圓周運動嘅定義, 雖然 v_A 同 v_B 嘅方向唔同, 但佢哋嘅量值係一樣嘅 (我哋用 v 嚟代表)。

n 要計算加速度, 我哋只知道速度嘅改變 (即 Δv)。

u 喺右面第二幅圖度, 我哋將用矢量嘅圖解法嚟表達出 Δv 嘅方向同量值。

n 考慮當兩個時間嘅時差非常之細嘅時候 (即 Δt 好接近零),

u Δv 嘅量值 (即圖中 Δv 嘅長度) 就會好接近 “以 A 點為圖心、半徑為 v 、圓心角為 $\Delta\theta$ 嘅弧嘅弧長” (即右圖中嘅虛線)。

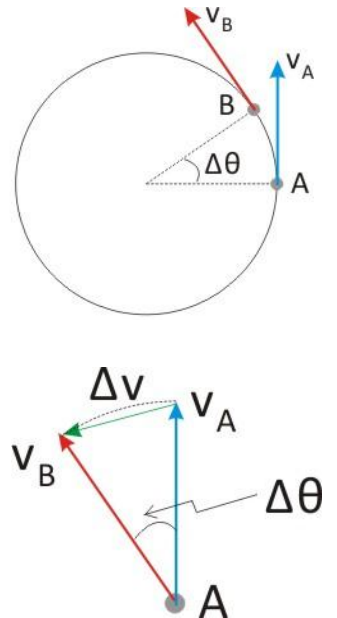
Ø 因此 $\Delta v = v \Delta\theta$

u 物體加速度 = 速度改變 / 時間

$$\begin{aligned} \text{即} \quad a &= \Delta v / \Delta t \\ &= v \Delta\theta / \Delta t \\ &= v \omega \quad (\text{因為 } \omega = \Delta\theta / \Delta t) \end{aligned}$$

n 以上雖然計到 “ $a = v \omega$ ”, 但一般嚟講, 我哋會再用 “ $v = r \omega$ ” 嚟改寫條公式為:

$$a = r \omega^2 \quad \text{或} \quad a = v^2 / r$$



I 以上所推導嘅只係加速度嘅量值。至於加速度嘅方向就可以咁推導出嚟:

n 喺第二幅圖入面, 因為 v_A 同 v_B 嘅量值係一樣, 所以個三角形係一個等腰三角形, 而當中嘅頂角為 $\Delta\theta$ 。

n 當 Δt 好接近零嘅時候, $\Delta\theta$ 會好接近零。

n 利用三角形內角和等於 180° , 我哋可以推論出雙底角會好接近零。

u 即 Δv 會同 v_A 係互相垂直嘅。

u 而如果我哋睇返成個圖形嘅圖, Δv 同 v_A 互相垂直即係代表咗 “ Δv 嘅方向係指向圓心”。

u 因此, 物體嘅加速度嘅方向都係指向圓心。

2 以上就係標題所提及嘅 “向心加速度 $a = v^2/r$ ”。

2 對好多同學嚟講, 以上嘅推導可能好難理解。

n 咁係因為係課始終都係以前 A-Level 嘅課程。大家量力而為吧!